Mécanique - Chapitre 4 : Energétique du point matériel

Ce qu'il faut retenir…

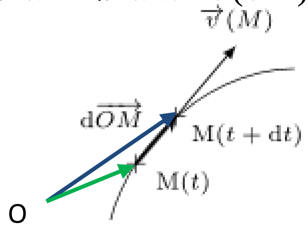
GRANDEURS ENERGETIQUES :

Puissance d'une force $\vec{F}$ dans un référentiel R : $\boxed{P = \vec{F} \cdot \overrightarrow{v_{M/R}}}$ en Watt

- P > 0 : puissance motrice, la force accompagne le déplacement. *(Exemple : le poids pendant une chute)*
- P < 0: puissance résistante, la force s'oppose au déplacement. *(Exemple : force de frottement)*
- P = 0 $\Leftrightarrow \vec{F} \perp \overrightarrow{v_{M/R}}$ *(Exemple : réaction normale du support)*

Travail d'une force dans un référentiel R :

Déplacement élémentaire : Soit un point matériel M repéré à l'instant t par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans le référentiel R (O est un point fixe de R). Soumis à une force $\vec{F}$, **il** effectue pendant la durée infinitésimale dt, un déplacement élémentaire $d(\overrightarrow{OM})$ tel que :



$$\boxed{d(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM}(t+dt) - \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{M_{(t)}M_{(t+dt)}} = \overrightarrow{v_{M/R}}\, dt}$$

En coordonnées cartésiennes : $d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z$

En coordonnées cylindriques : $d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{e}_r + r d\theta\,\vec{e}_\theta + dz\,\vec{e}_z$

Travail élémentaire pendant la durée dt (entre t et t + dt) :

$$\boxed{\delta W = P.dt = \vec{F} \cdot d(\overrightarrow{OM})}$$

Travail entre 2 points A et B : $\boxed{W_{A\to B} = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F} \cdot d(\overrightarrow{OM})}$

En Joule, grandeur algébrique **définie le long d'un déplacement**, qui dépend du référentiel et à priori du chemin suivi.

- W > 0 : travail moteur, la force est orientée selon le sens du déplacement.
- W < 0: travail résistant, la force s'oppose au déplacement.
- W = 0 $\Leftrightarrow \vec{F} \perp d(\overrightarrow{OM})$: une force perpendiculaire au déplacement élémentaire ne travaille pas *(Exemple : la réaction normale du support, la tension du fil dans le cas du pendule simple)*

$$\boxed{\text{Cas d'une force constante : } W_{A\to B} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}}$$

Travail du poids : On considère un point matériel M de masse m parcourant une courbe quelconque entre les points $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\boxed{\text{Dans le cas d'une verticale Oz ascendante : } W_{A\to B}(m\vec{g}) = -mg\,(z_B - z_A)}$$

Dans le cas d'une verticale Oz descendante : $W_{A\to B}(m\vec{g}) = mg\,(z_B - z_A)$

Mouvement descendant

$$\boxed{W_{A\to B}(m\vec{g}) = \pm mg \times dénivellation}$$

Mouvement ascendant

THEOREMES DE LA PUISSANCE CINETIQUE ET DE L'ENERGIE CINETIQUE :

Energie cinétique d'un point matériel de masse m dans un référentiel R :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m v_{M/R}^{\ 2}} \text{ en Joule}$$

Démo : dans R référentiel galiléen

$$\text{on multiplie scalairement le PFD par } \overrightarrow{v_{M/R}} : m\frac{d\overrightarrow{v_{M/R}}}{dt}\cdot\overrightarrow{v_{M/R}} = \left(\sum\vec{F}\right)\cdot\overrightarrow{v_{M/R}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\left(m\frac{v_{M/R}^{\ 2}}{2}\right)}{dt} = \sum\left(\vec{F}\cdot\overrightarrow{v_{M/R}}\right) \Leftrightarrow \frac{dE_C}{dt} = P_{totale}$$

Le théorème de la puissance cinétique permet d'établir l'équation différentielle dans le cas d'un mouvement à 1 degré de liberté.

$$\Leftrightarrow dE_c = P_{totale}dt = \delta W_{total} \ (\textit{forme différentielle})$$

$$\Leftrightarrow \Delta E_c = W_{total}$$

Enoncé de la forme intégrale : $E_c(B) - E_c(A) = \underset{A\to B\,total}{W}$

La variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre 2 positions A et B dans un référentiel galiléen est égal au travail total de toutes les forces appliquées entre ces 2 positions.

ENERGIE POTENTIELLE D'UNE FORCE CONSERVATIVE :

Une force est dite conservative si **son travail ne dépend pas du chemin suivi**, il ne dépend alors que des positions entre lesquelles on veut le calculer. Il peut donc se mettre sous la forme d'une variation d'une fonction ne dépendant que de la position.

Pour une force conservative : $\underset{A\to B}{W} = -(E_p(B) - E_p(A))$

(E_p est définie à une constante prés)

Force	Le poids $\vec{mg}$	Force de rappel élastique $\vec{F} = -k(l-l_0)\vec{u}$
E_p	Verticale Oz ascendante : $E_p = mgz + Cte$ Verticale Oz descendante : $E_p = -mgz + Cte$	$E_p = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$ (si E_p= 0 pour l = l_0)

Une position d'équilibre correspond à un **extrémum d'énergie potentielle**. S'il s'agit un **minimum**, l'équilibre est **stable** sinon il est **instable**.

THEOREME DE L'ENERGIE MECANIQUE :

Energie mécanique d'un point matériel dans un référentiel R : $E_m = E_c + E_p$

Démo : dans R référentiel galiléen, on distingue les forces conservatives (dont la somme des travaux est W^c) des forces non conservatives (dont la somme des travaux est W^{nc} , exemple : frottements).

$$\Delta E_c = W_{total} = W^c + W^{nc} \quad or \quad W^c = -\Delta E_p \quad donc \quad \Delta E_c + \Delta E_p = W^{nc}$$

$$\Leftrightarrow \Delta E_m = W^{nc} \Leftrightarrow dE_m = \delta W^{nc} \Leftrightarrow \frac{dE_m}{dt} = P^{nc}$$

Enoncé de la forme intégrale : $E_m(B) - E_m(A) = \underset{A\to B}{W^{nc}}$

La variation d'énergie mécanique d'un point matériel entre 2 positions A et B dans un référentiel galiléen est égal au travail total des forces non conservatives entre ces 2 positions.

Conséquence : en l'absence de forces non conservatives, E_m = Cte, E_m se conserve et sa valeur est fixée par les conditions initiales, cette équation est appelée intégrale 1ère du mouvement.